Mécanique des solide indéformables

I. Introduction

Mécanique

La mécanique est une science des mouvements et dynamiques des systèmes matériels et l'application de cette science à la construction et à l'utilisation de machines.

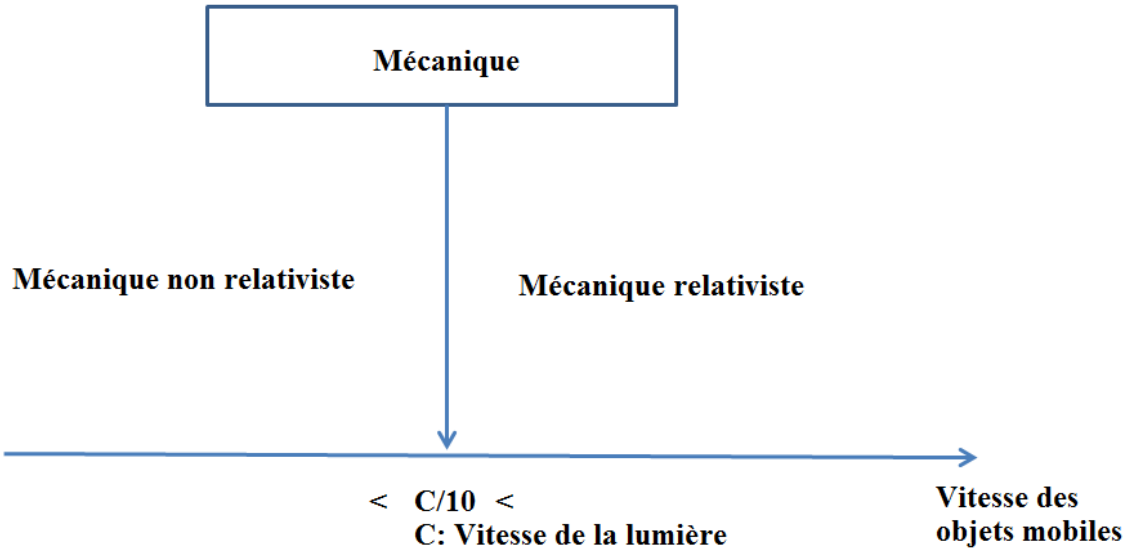
II. Mécanique relativiste et mécanique non relativiste

Selon les vitesses des objets mobiles, on peut classer la mécanique en deux classes:

- ✓ **Mécanique relativiste**
- ✓ **Mécanique non relativiste**

Si un objet se déplace avec une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière divisée par 10 (v< C/10), alors le mouvement et les propriétés dynamiques de cet objet seront étudiés par la mécanique non relativiste.

Si un objet se déplace avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière divisée par 10 (v> C/10), alors le mouvement et les propriétés dynamiques de cet objet seront étudiés par la mécanique relativiste.



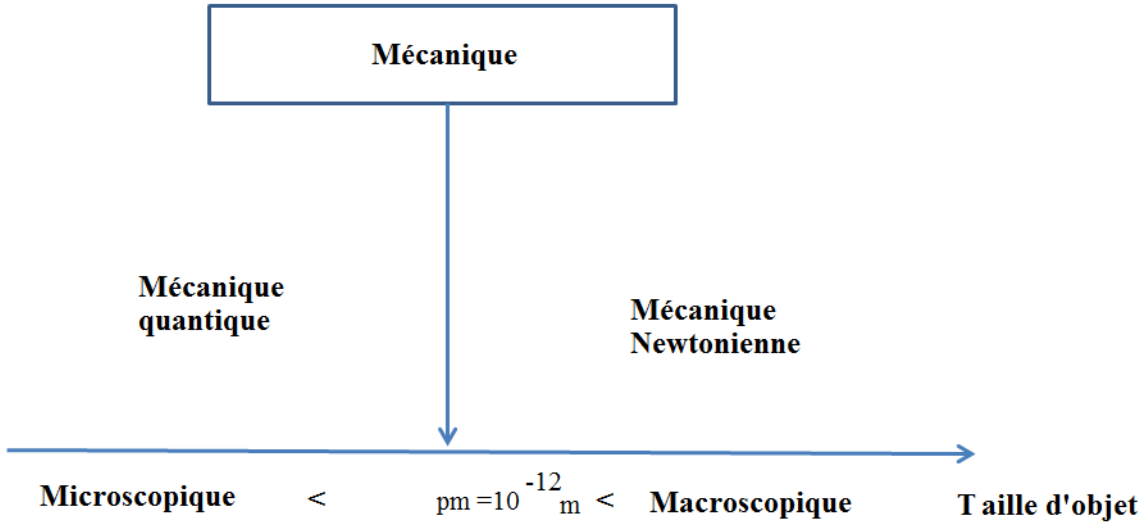
III. Mécanique newtonienne et mécanique quantique

Selon les tailles des objets on peut classer la mécanique en deux classes:

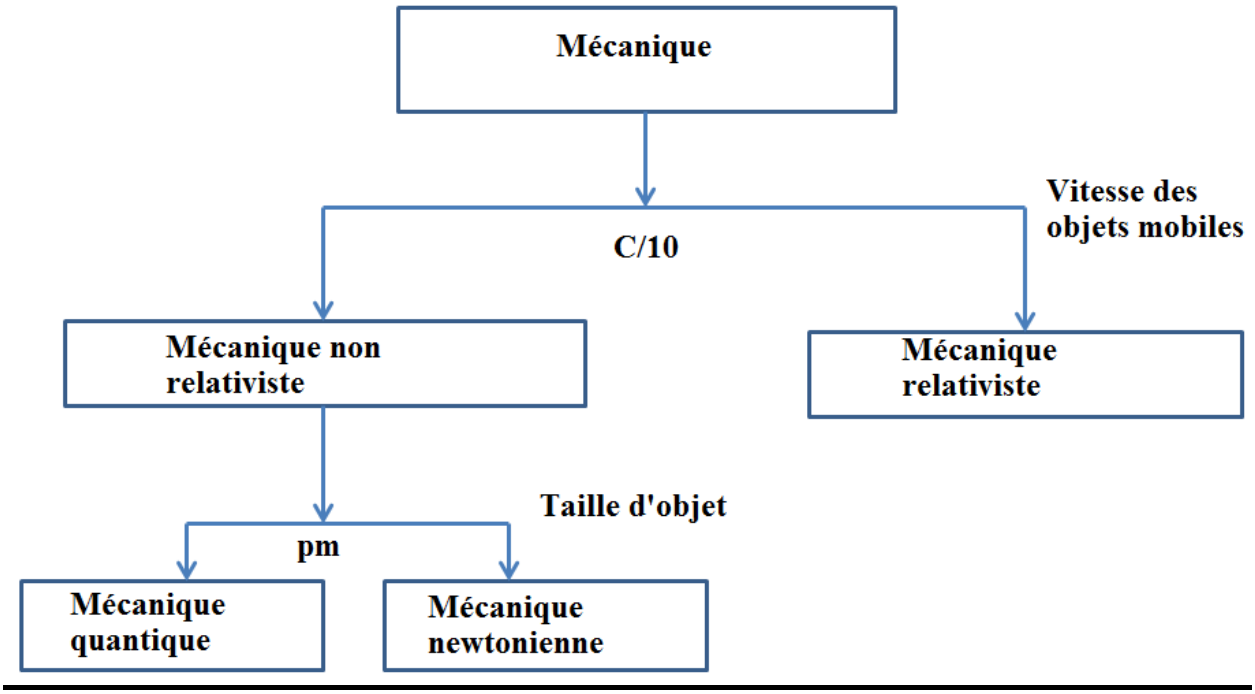
- ✓ **Mécanique quantique**
- ✓ **Mécanique newtonienne**

Si la taille d'un objet à l'échelle macroscopique **(les objets observés)**, elle est supérieure à pm (10^{-12}m) alors le mouvement et les propriétés dynamiques de cet objet seront traités par la mécanique newtonienne.

Si la taille d'un objet à l'échelle microscopique **(atome, noyau, électron, proton neutron…)**, elle est inférieure à pm (10^{-12}m) alors le mouvement et les propriétés dynamiques de cet objet seront traités par la mécanique quantique.



Résumé



La mécanique des solides étudie les corps solides dont les tailles sont à l'échelle macroscopique (objets observés) et les vitesses sont négligeables devant la vitesse de la lumière $c=3.10^{8}$m), donc la mécanique des solides est située dans le cadre de la mécanique newtonienne.

Mécanique du point matériel et Mécanique des solides

La mécanique du point matériel correspondant généralement aux connaissances de base de la mécanique, elle est la première partie de la mécanique abordée au Lycée et au début des enseignements universitaires. Les problèmes des référentiels, les repères, la composition de mouvement, les forces d'inertie (d'entrainement et de Coriolis), etc., sont les principales difficultés de cette initiation. La partie que nous allons aborder est essentielle parce qu'elle définit les notions de la mécanique des solides indéformables que l'on les trouve dans tous les secteurs de l'industrie.

La mécanique du point matériel concerne exclusivement les objets matériels dont les dimensions spatiales sont faibles et négligeables devant les distances qui caractérisent le mouvement étudié. Dans le cadre de la mécanique du point matériel, un objet matériel est modélisé par un point géométrique de masse m. En outre, au niveau cinématique le mouvement de rotation du point n'est pas tenu compte, mais seulement le mouvement de translation est considéré. Par contre, dans la mécanique du solide indéformable, le mouvement de rotation du corps

solide n’est pas négligeable en effet le mouvement de translation et de rotation sont tenus compte.

Dans l’étude de la mécanique du point matériel et du solide indéformable, chaque grandeurs physique peut être représentée par un vecteur (position d’objet, vitesse, accélération, force, moment, etc.) ou un scalaire qui est un nombre affecté d’une unité (énergie, travail, puissance, intensité, etc.). C’est pourquoi que cette étude nécessite des outils mathématiques (repères, le calcul vectoriel, torseur, etc.).

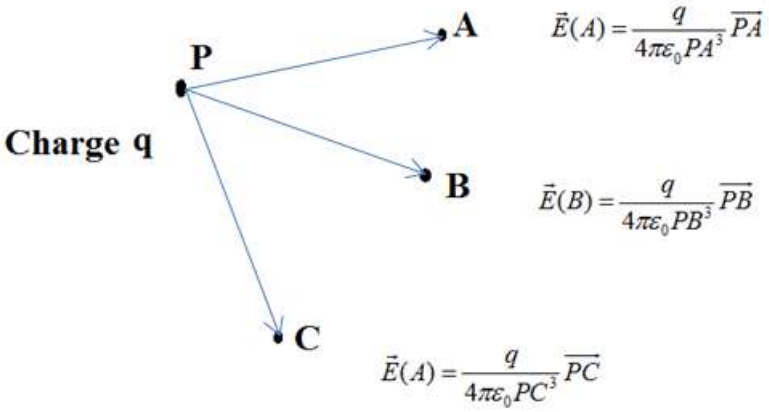
Le calcul vectoriel et les torseurs

I. Champ de vecteurs

I.1. Champ de vecteurs

Exemples

✓ Champ électrique $\vec{E}(M)$

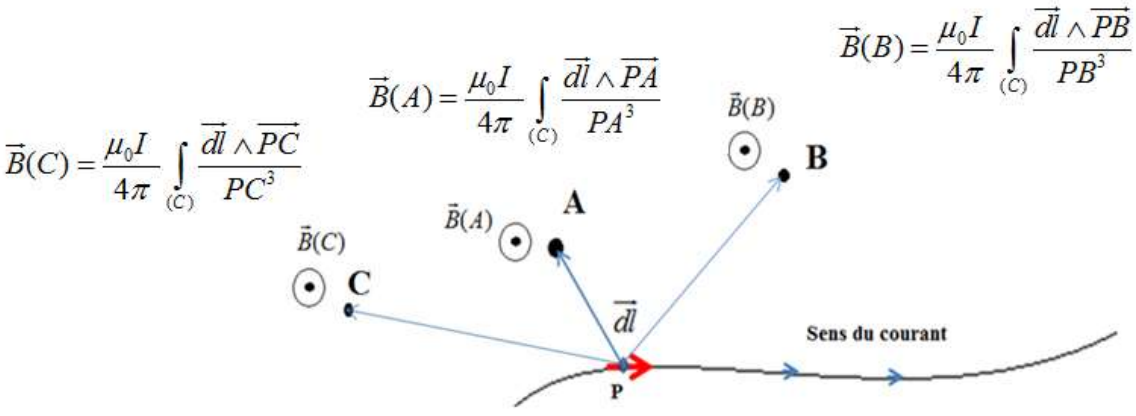


Que remarquez-vous ?

La remarque :

Le champ électrostatique est une application qui associe chaque point de l'espace un vecteur.

✓ Champ magnétique $\vec{B}(M)$

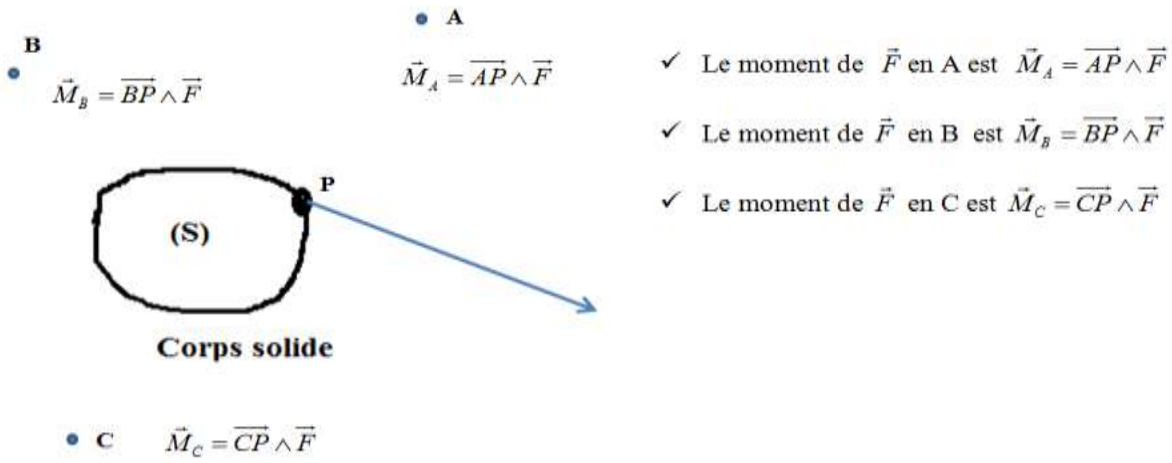


Que remarquez-vous ?

La remarque :

Le champ magnétique est une application qui associe chaque point de l'espace un vecteur.

- ✓ Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée sur un corps dont le point d'action P par rapport à un point quelconque d'espace.



Que remarquez-vous ?

La remarque :

Le moment dynamique d'une force est une application qui associe chaque point de l'espace un vecteur

Définition

Toute application $\vec{V}$ qui associe à chaque point M d'espace un vecteur est un champ de vecteurs.

$$\vec{V} : M \mapsto \vec{V}(M)$$

L'ensemble de départ est les points d'espace et l'ensemble d'arrivée est l'espace vectoriel Euclidien

I.2. Champ uniforme

Le champ de vecteurs $\vec{V}$ est uniforme sur une région R d'espace si le vecteur $\vec{V}$ est le même en tout point de cette région.

Quels que soient A et B deux points de la région R : $\vec{V}(A)=\vec{V}(B)=\vec{V}$.

II. Calcul vectoriel

II.1.Produit scalaire

Soient $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(x,y,z)$ deux vecteurs d'espace vectoriel euclidien, (a,b,c) et (x,y,z) leurs coordonnées respectivement dans la même base orthonormée.

Le produit scalaire de $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(x,y,z)$ est le scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, il est défini par :

$$\vec{u}.\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\cos(\vec{u},\vec{v})=ax+by+cz$$

II.2. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(x,y,z)$ est le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ qui se caractérise par :

- Sa direction est perpendiculaire sur celle de $\vec{u}$ et celle de $\vec{v}$, **(**$(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{u}$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{v}$.
- Les trois vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}$ forment un trièdre direct $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$, et le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ peut être déterminé par la règle de la main droite ou du tire-bouchon.
- Le module de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est donnée comme par : $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\left|\sin(\vec{u},\vec{v})\right|$

- Ses coordonnées

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

II.3. Propriétés

- Le produit vectoriel est anticommutatif :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ne sont pas nuls et colinéaires, leur le produit vectoriel est nul.

$$\vec{u} = \lambda \vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

II.4. Double produit vectoriel

Soient $\vec{u}(a,b,c)$, $\vec{v}(x,y,z)$ et $\vec{w}(m,n,p)$ trois vecteurs de l'espace vectoriel euclidien, (a,b,c) , (x,y,z) et (m,n,p) leurs coordonnées dans la même base orthonormée.

Le double produit vectoriel de trois vecteurs s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}m\\n\\p\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}yp-zn\\zm-xp\\xn-ym\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b.(xn-ym)-c.(zm-xp)\\c.(yp-zn)-a.(xn-ym)\\a.(xn-ym)-b.(yp-zn)\end{pmatrix}$$

Ce calcul donne la formule générale du double produit vectoriel suivante :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}.\vec{w}).\vec{v}-(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$$

II.5. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le scalaire $[\vec{u}\wedge\vec{v}].\vec{w}$, il est noté $[\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}]$

$$[\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}]=[\vec{u}\wedge\vec{v}].\vec{w}=[\vec{v}\wedge\vec{w}].\vec{u}=[\vec{w}\wedge\vec{u}].\vec{v}$$

$$[\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}]=[\vec{v}.\vec{w}.\vec{u}]=[\vec{w}.\vec{u}.\vec{v}]$$

III. Vecteur lié- Vecteur glissant

III.1. Vecteur lié

Un vecteur lié est un couple $(P,\vec{u})$ formé par un vecteur $\vec{u}$ d'espace vectoriel euclidien et un point P d'espace qui est appelé l'origine ou point d'application.

En mécanique, les forces sont des bons exemples de vecteurs liés (la force et son point d'action)

III.2. Moment d'un vecteur lié

Le moment d'un vecteur lié $(P, \vec{u})$ en un point O est un vecteur donné par:

$$\vec{M}_O(P, \vec{u}) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}$$

Le moment d'un vecteur lié $(P, \vec{u})$ par rapport un axe (Δ) dont le vecteur directeur est $\vec{a}$, est un scalaire noté $M_\Delta(P, \vec{u})$ son expression est sous la forme suivante :

$$M_\Delta(P, \vec{u}) = \vec{M}_O(P, \vec{u}).\vec{a}$$

Où O est un point quelconque de l'axe (Δ)

III.3. Vecteur glissant

Un glisseur ou vecteur glissant est un vecteur qui glisse sur une droite qui est son support. Il est défini par un vecteur $\vec{v}$ et un point P de son support et noté $(P, \vec{v})$

Le moment d'un glisseur $(P, \vec{v})$ par rapport un point A est :

$$\vec{M}_A(P, \vec{v}) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}$$

VI. Dérivée d'un vecteur dans un référentiel

VI.1. Référentiel

Le mouvement est toujours relatif à une référence qui est un corps solide. En outre, le mouvement est relatif à un référentiel.

Un référentiel est l'association d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et une horloge (chronomètre). Le repère pour répondre à la question **'où se trouve le mobile'**, l'horloge pour répondre à la question '**quand est-il passé à cette position'.**

VI.2. Repère

Un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est défini par une origine qui fixe et liée avec la référence, et par une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ d'espace vectoriel euclidien. Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \; et \; \vec{e}_3$ sont unitaires et perpendiculaires entre eux $(\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij})$ et leurs supports représentes les axes de repère.

Soient $\Re(O, x, y, z, t)$ et $\Re'(O, x', y', z', t)$ deux référentiels leurs base respectivement sont $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'})$.

$\vec{X}$ est un vecteur d'espace vectoriel euclidien (x, y, z) et (x', y', z') ses coordonnées dans $\Re$ et $\Re'$ respectivement.

Alors :

$$\vec{X} = x\vec{e}_1 + \ y\vec{e}_2 + \ z\vec{e}_3 \text{ et } \vec{X} = x'\vec{e}_1' + \ y'\vec{e}_2' + \ z'\vec{e}_3'$$

VI.2. Dérivée d'un vecteur

Les dérivées du vecteur $\vec{X}$ par rapport au temps dans les deux référentiels $\Re$ et $\Re'$ respectivement sont:

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{\Re} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3 \quad \text{et} \quad \left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{\Re'} = \frac{dx'}{dt}\vec{e}_1' + \frac{dy'}{dt}\vec{e}_2' + \frac{dz'}{dt}\vec{e}_3'$$

Si le référentiel $\Re'$ en rotation par rapport au référentiel $\Re$, la dérivée de $\vec{X}$ par rapport au temps dans le référentiel $\Re$ est donnée par l'expression suivante:

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{\Re} = \left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right)_{\Re'} + \vec{\Omega}\left(\Re'/\Re\right) \wedge \vec{X}$$

$\Omega\left(\Re'/\Re\right)$: représente le vecteur de rotation de $\Re'$ par rapport à $\Re$

VI.3. Champ équiprojectif

Un champ de vecteurs $\vec{M}$ est équiprojectif si seulement si, quels que soient A et B deux points d'espace ξ vérifient la relation suivante :

$$\forall A \text{ et B } \in \xi \quad \overrightarrow{AB}.\vec{M}(A) = \overrightarrow{AB}.\vec{M}(B)$$

$\vec{M}(A)$ et $\vec{M}(B)$ sont les champs de vecteurs en A et B respectivement

Cette formule qui s'appelle l'équiprojectivité, qui signifie que la projection $\vec{M}(A)$ et celle de $\vec{M}(B)$ sur la droite (AB) sont égales.

Exercice d'application

On considère un corps solide (S) subi une force $\vec{F}$ dont le point d'action est P

Montrer que le moment dynamique de la force $\vec{F}$ est un **champ équiprojectif**.

La réponse

Pour montrer que le moment dynamique de $\vec{F}$ est un champ équiprojectif, il suffit de montrer que la relation d'équiprojectivité est vérifiée pour deux quelconque d'espace :

Soient A et B deux points de l'espace (voir la figure en-dessous) les moments de $\vec{F}$ en A et B sont respectivement:

$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$ et $\vec{M}_B = \overrightarrow{BP} \wedge \vec{F}$

On calcule $\overrightarrow{AB}.\vec{M}_A$

$\overrightarrow{AB}.\vec{M}_A = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}\right)$, on utilisant la relation de Chasles $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ en trouvant

$$\overrightarrow{AB}.\vec{M}_A = \overrightarrow{AB}.\left(\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) \wedge \vec{F}\right) = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}\right) + \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BP} \wedge \vec{F}\right)$$

$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}\right) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AB} \perp \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}\right)$

Alors

$$\overrightarrow{AB}.\vec{M}_A = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BP} \wedge \vec{F}\right) = \overrightarrow{AB}.\vec{M}_B$$

Enfin, la relation d'équiprojectivité est vérifiée pour le moment dynamique de $\vec{F}$ alors, il est équiprojectif

VI.4. Champ antisymétrique

Un champ de vecteurs $\vec{M}$ est antisymétrique si seulement s'il existe un vecteur unique $\vec{R}$ d'espace euclidien et quels que soient deux points A et B d'espace ξ, la formule suivante est vérifiée :

$$\forall A \text{ et B } \in \xi \quad \exists \vec{\mathrm{R}} \qquad \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{\mathrm{R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$